

GUIA MANGÁ DE

CÁLCULO

DIFERENCIAL E INTEGRAL

HIROYUKI KOJIMA
SHIN TOGAMI
BECOM CO., LTD.



novatec

OHM
Ohmsha

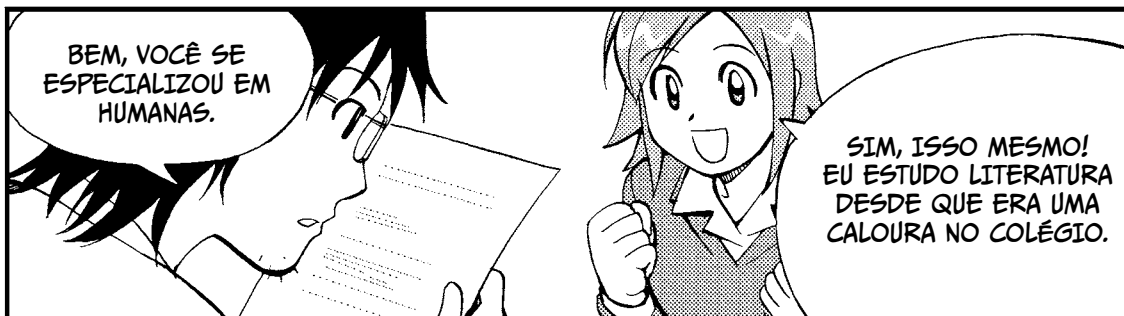


SUMÁRIO

PREFÁCIO	xi
PRÓLOGO:	
O QUE É UMA FUNÇÃO?	1
Exercício	14
1	
VAMOS DERIVAR UMA FUNÇÃO!	15
Aproximando com Funções	16
Calculando o Erro Relativo	27
A Derivada em Ação!	32
Passo 1	34
Passo 2	34
Passo 2	35
Calculando a Derivada	39
Calculando a Derivada de uma Função Constante, Linear ou Quadrática.	40
Resumo	40
Exercícios	41
2	
VAMOS APRENDER TÉCNICAS DE DERIVAÇÃO!	43
A Regra da Soma para Derivação	48
Regra do Produto de Derivadas	53
Derivando Polinômios	62
Encontrando os Pontos de Máximo E De Mínimo	64
Usando o Teorema do Valor Médio	72
Usando a Regra do Quociente de Derivação	74
Calculando Derivadas de Funções Compostas	75
Calculando Derivadas de Funções Inversas	75
Exercícios	76
3	
VAMOS INTEGRAR UMA FUNÇÃO!	77
Ilustrando O Teorema Fundamental Do Cálculo	82
Passo 1 – Quando a Densidade é Constante.	83
Passo 2 – Quando a Densidade Muda Gradualmente	84
Passo 3 – Quando a Densidade Muda Continuamente	85
Passo 4 – Revisão da Função Linear Aproximada	88
Passo 5 – Aproximação → Valor Exato	89
Passo 6 – $p(x)$ É a Derivada de $q(x)$	90

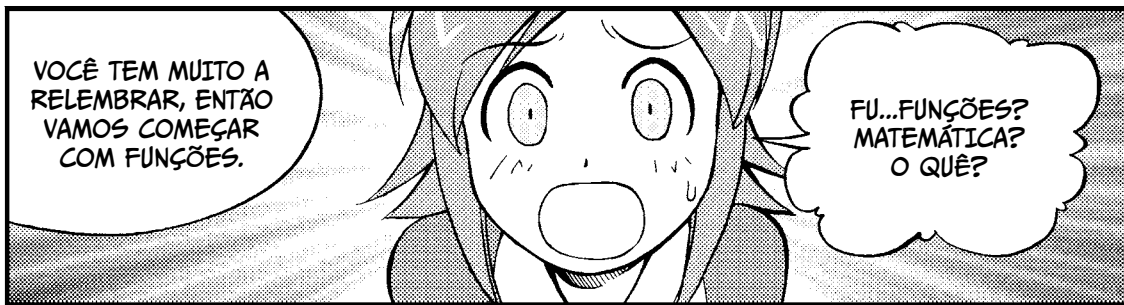
Usando o Teorema Fundamental do Cálculo	91
Resumo	93
Uma Explicação Rigorosa do Passo 5	94
Usando Fórmulas de Integração	95
Aplicando o Teorema Fundamental	101
Curva de Oferta	102
Curva de Demanda	103
Revisão do Teorema Fundamental do Cálculo	110
Fórmula da Regra da Substituição para Integração	111
A regra da potência de integração	112
Exercícios	113
4	
VAMOS APRENDER TÉCNICAS DE INTEGRAÇÃO!	115
Usando Funções Trigonômicas	116
Usando Integrais com Funções Trigonômicas	125
Usando Funções Exponenciais e Logarítmicas	131
Generalizando as Funções Exponencial e Logarítmica	135
Resumo das Funções Exponencial e Logarítmica	140
Mais Aplicações do Teorema Fundamental	142
Integração por Partes	143
Exercícios	144
5	
VAMOS APRENDER SOBRE EXPANSÕES DE TAYLOR!	145
Aproximando com Polinômios	147
Como Obter uma Expansão de Taylor	155
Expansão de Taylor de Várias Funções	160
O Que a Expansão de Taylor Nos Diz?	161
Exercícios	178
6	
VAMOS APRENDER SOBRE DERIVADAS PARCIAIS!	179
O Que São Funções Multivariáveis?	180
O Básico das Funções Lineares Variáveis	184
Derivação Parcial	191
Definição da Derivação Parcial	196
Derivadas Totais	197
Condições de Extremidade	199
Aplicando a Derivação Parcial na Economia	202
Regra da Cadeia	206
Derivadas de Funções Implícitas	218
Exercícios	218

EPÍLOGO:	
PARA QUE SERVE A MATEMÁTICA?	219
A	
SOLUÇÕES DOS EXERCÍCIOS	225
Prólogo	225
Capítulo 1	225
Capítulo 2	225
Capítulo 3	226
Capítulo 4	227
Capítulo 5	228
Capítulo 6	229
B	
PRINCIPAIS FÓRMULAS, TEOREMAS E FUNÇÕES APRESENTADOS NESTE LIVRO ..	231
Equações Lineares (Funções Lineares)	231
Derivação	231
Derivadas das Funções mais Comuns	232
Integrais	233
Expansão de Taylor	234
Derivadas Parciais	234
ÍNDICE	235



BEM, VOCÊ SE ESPECIALIZOU EM HUMANAS.

SIM, ISSO MESMO! EU ESTUDO LITERATURA DESDE QUE ERA UMA CALOURA NO COLÉGIO.



VOCÊ TEM MUITO A RELEMBRAR, ENTÃO VAMOS COMEÇAR COM FUNÇÕES.

FU...FUNÇÕES? MATEMÁTICA? O QUÊ?



QUANDO UMA COISA MUDA, ELA INFLUENCIA OUTRA COISA. UMA FUNÇÃO É UMA CORRELAÇÃO.

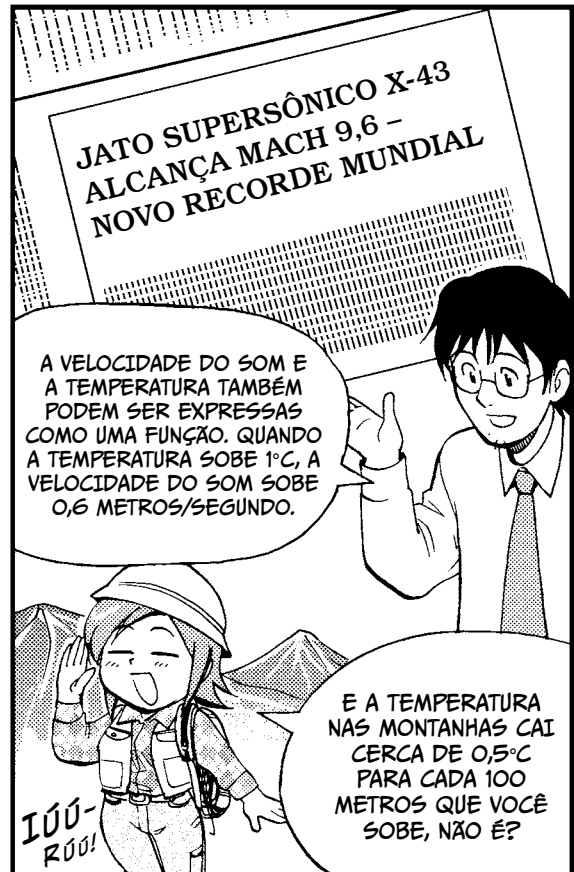
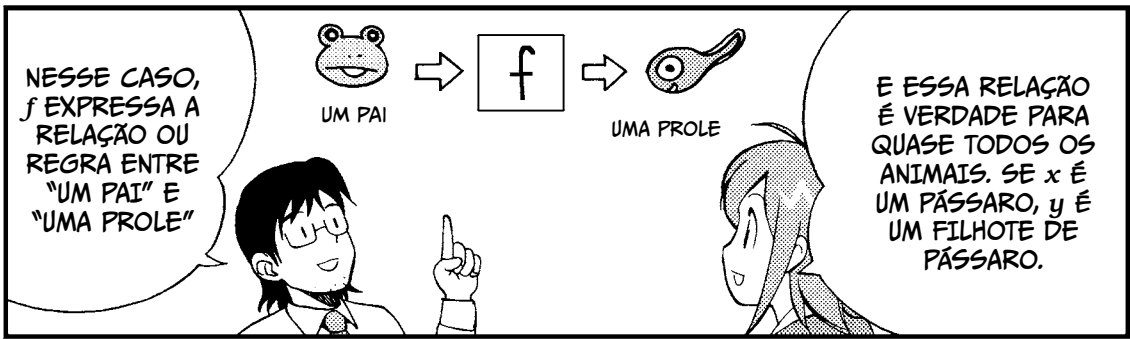
VOCÊ PODE PENSAR NO MUNDO EM SI COMO UMA GRANDE FUNÇÃO.

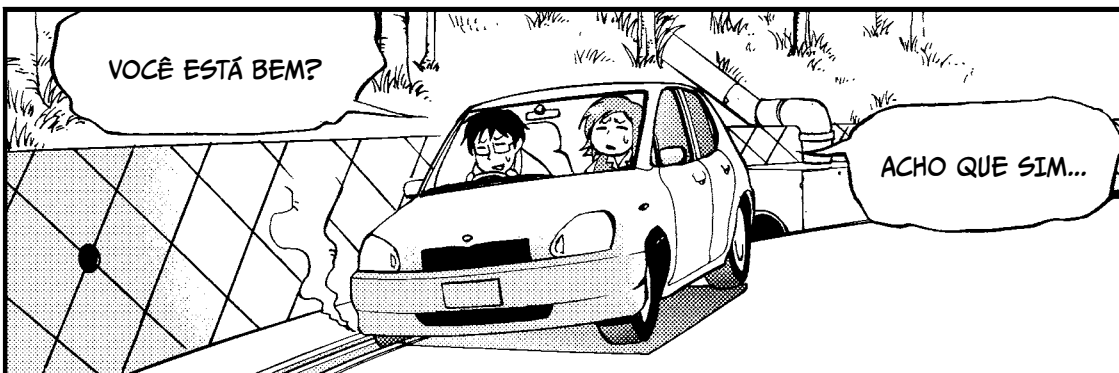
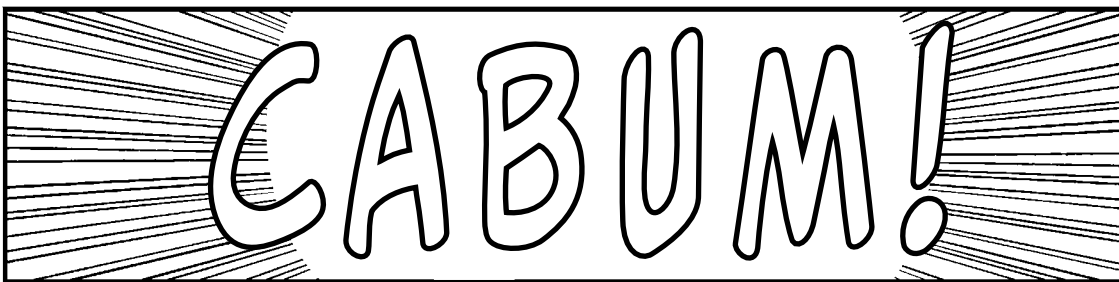
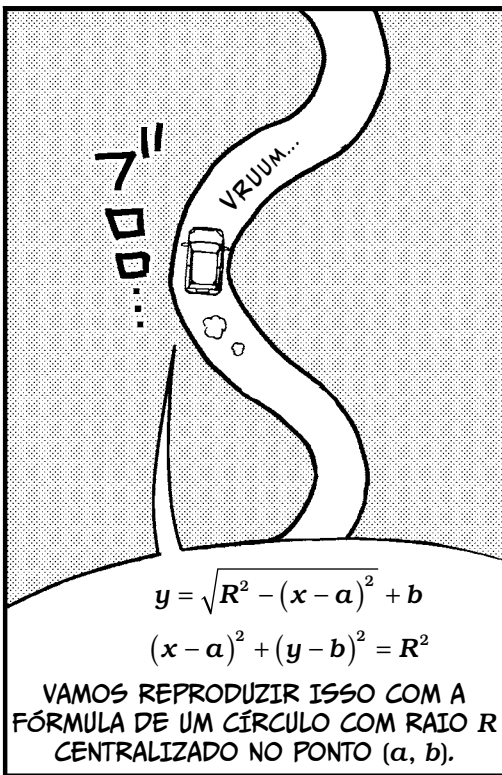


UMA FUNÇÃO DESCREVE UMA RELAÇÃO, CAUSALIDADE OU MUDANÇA.

COMO JORNALISTAS, NOSSO TRABALHO É ENCONTRAR A RAZÃO DAS COISAS ACONTECEREM - AS CAUSALIDADES.

SIM...





CALCULANDO O ERRO RELATIVO



	Nossa função original	Nossa função aproximada	
	↓	↓	
Erro relativo =	$\frac{\text{Diferença entre } f(x) \text{ e } g(x)}{\text{Variação de } x}$		SIMPLES, CERTO?



SUPONHA QUE A DISTÂNCIA QUE ELE CAMINHE EM x MINUTOS A PARTIR DO PONTO DE REFERÊNCIA O SEJA $f(x)$ METROS.

EM a MINUTOS, ELE ESTARIA NO PONTO A.

E SUPONHA QUE, EM x MINUTOS, ELE ESTARIA NO PONTO P.

ISSO SIGNIFICA QUE ELE VIAJOU DE A ATÉ P EM $(x - a)$ MINUTOS.

CERTO. MAS ISSO SIGNIFICA ALGO?

SUPONHA QUE ESSE TEMPO DE VIAGEM $(x - a)$ SEJA EXTREMAMENTE PEQUENO.

$$f(x) \approx f'(a)(x - a) + f(a)$$

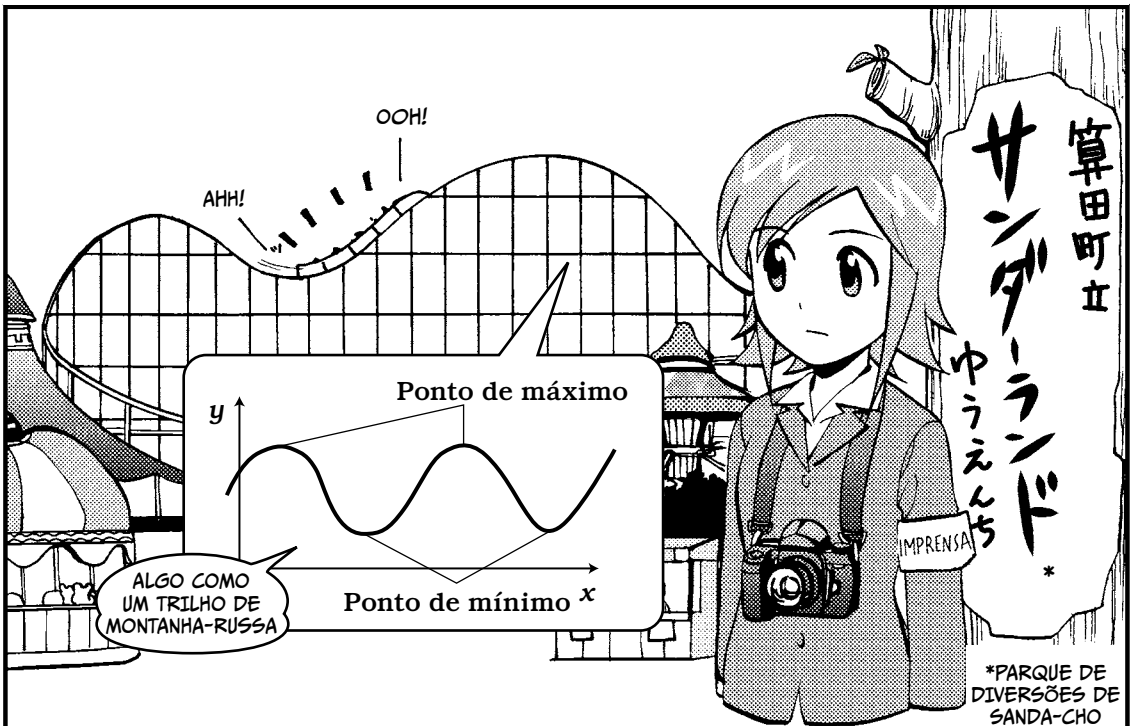
ISSO PODE SER ALTERADO PARA...

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \approx f'(a)$$

SR. SEKI, O LADO ESQUERDO DA EQUAÇÃO É DISTÂNCIA PERCORRIDA DIVIDIDA PELO TEMPO DE VIAGEM. ENTÃO, ISSO É A VELOCIDADE?

EXATO! ENTÃO, $f'(a)$ REPRESENTA A VELOCIDADE DE FUTOSHI AO PASSAR PELO PONTO A.

ENCONTRANDO OS PONTOS DE MÁXIMO E DE MÍNIMO



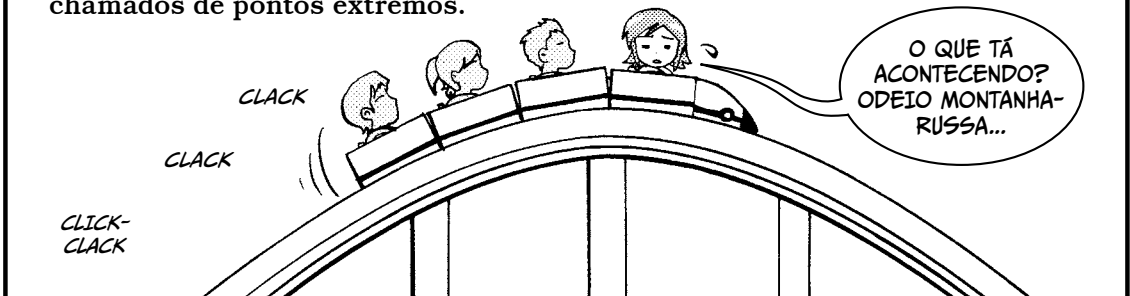
Máximo e mínimo são os pontos em que uma função muda de crescente para decrescente ou vice-versa. Portanto, eles são importantes para examinar as propriedades de uma função.

Como os pontos de máximo e de mínimo costumam ser o máximo ou mínimo absoluto, respectivamente, eles são pontos importantes para se obter uma solução otimizada.

TEOREMA 2-1: CONDIÇÕES PARA VALORES EXTREMOS

Se $y = f(x)$ tem um ponto de máximo ou de mínimo em $x = a$, então $f'(a) = 0$.

Isso significa que podemos encontrar os pontos de máximo e de mínimo encontrando valores para a que satisfaçam $f'(a) = 0$. Esses valores também são chamados de pontos extremos.



USANDO FÓRMULAS DE INTEGRAÇÃO

FÓRMULA 3-1: FÓRMULAS DE INTEGRAÇÃO

$$\textcircled{1} \quad \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$$

Os intervalos das integrais definidas de uma mesma função podem ser juntados.

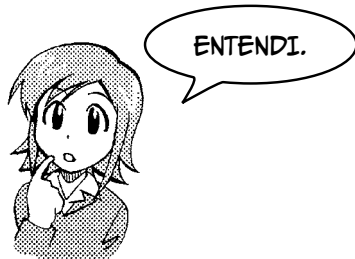
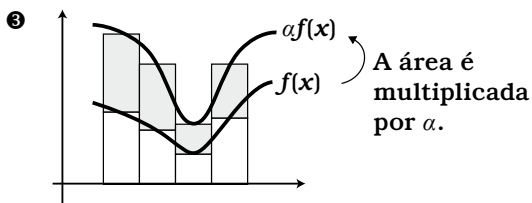
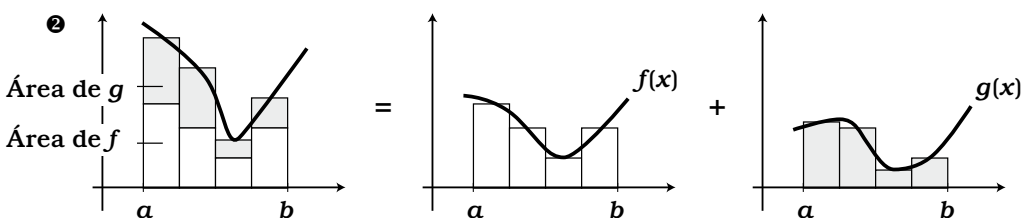
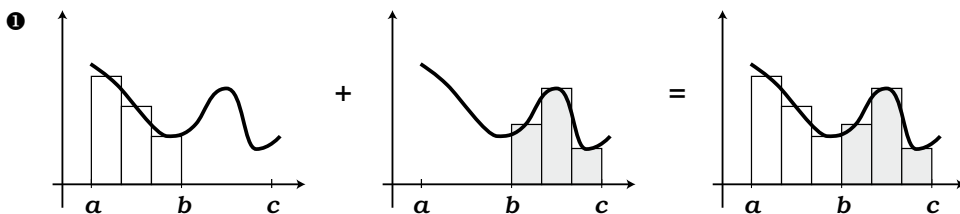
$$\textcircled{2} \quad \int_a^b \{f(x) + g(x)\} dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

A integral definida de uma soma pode ser dividida na soma das integrais definidas.

$$\textcircled{3} \quad \int_a^b \alpha f(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx$$

Uma constante de multiplicação dentro de uma integral definida pode ser movida para fora da integral.

As expressões de $\textcircled{1}$ a $\textcircled{3}$ podem ser entendidas intuitivamente se desenharmos suas figuras.



Provado que a Integral da Velocidade é a Distância!

Integral da velocidade = diferença na posição = distância percorrida

Se entendermos essa fórmula, dizem que conseguiremos calcular a distância percorrida por objetos cuja velocidade muda constantemente. Mas isso é verdade? Nossa promissora jornalista novata Noriko Hikima vai a fundo na verdade sobre esse assunto em seu relato contundente.

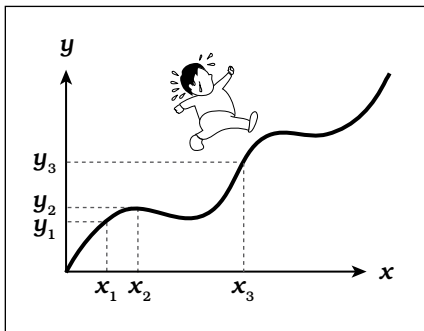


Figura 1: Este gráfico representa a distância percorrida por Futoshi ao longo do tempo. Ele se move pelos pontos $y_1, y_2, y_3 \dots$ conforme o tempo passa em $x_1, x_2, x_3 \dots$

Sanda-Cho – Alguns leitores se lembram do nosso exemplo anterior descrevendo Futoshi caminhando em uma esteira rolante. Outros terão bloqueado deliberadamente tal imagem suada de suas mentes. Mas é quase certeza que você se recorda que a derivada da distância é a velocidade.

❶ $y = F(x)$

❷ $\int_a^b v(x) dx = F(b) - F(a)$

A equação ❶ expressa a posição do enorme e suado Futoshi. Em outras palavras, após x segundos ele se arrastou por uma distância total y .

Integral da Velocidade = Diferença na Posição

A derivada de $F'(x)$ da expressão ❶ é a “velocidade instantânea” em x segundos. Se rescrevermos $F'(x)$ como $v(x)$, usando v para velocidade, o Teorema Fundamental do Cálculo pode ser usado para obter a equação ❷! Observe o gráfico de $v(x)$ na Figura 2-A – a velocidade de Futoshi ao longo do tempo. A parte sombreada do gráfico equivale à integral – equação ❷.

Mas olhe também para a Figura 2-B, que mostra a distância que Futoshi percorreu ao longo do tempo. Se observarmos as Figuras 2-A e 2-B lado a lado, veremos que a integral da velocidade é igual à diferença na posição (ou distância)! Repare como

os dois gráficos batem um com o outro – quando a velocidade de Futoshi é positiva, sua distância aumenta, e vice-versa.

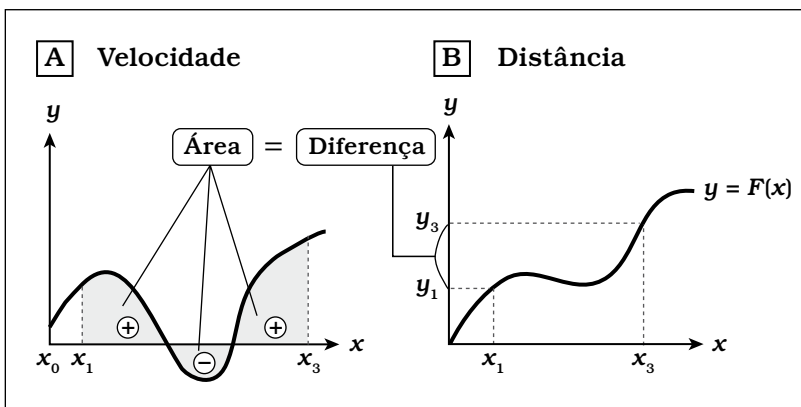
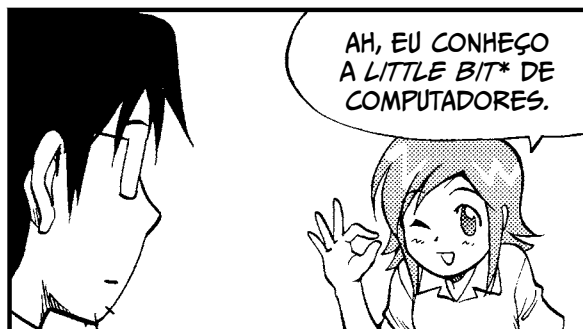
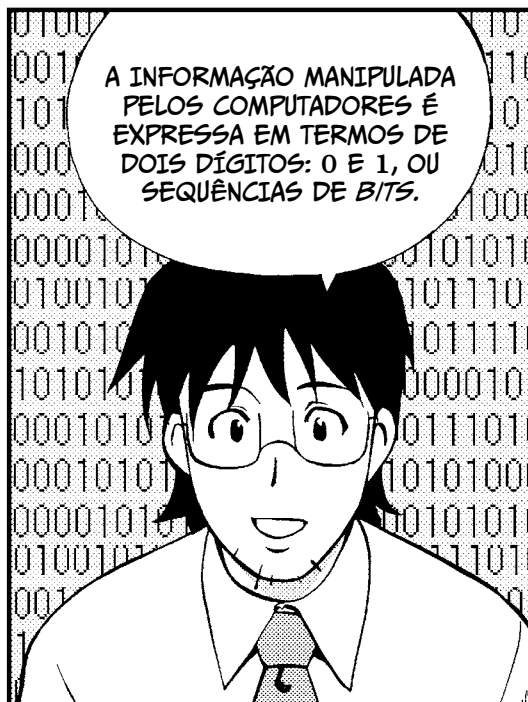
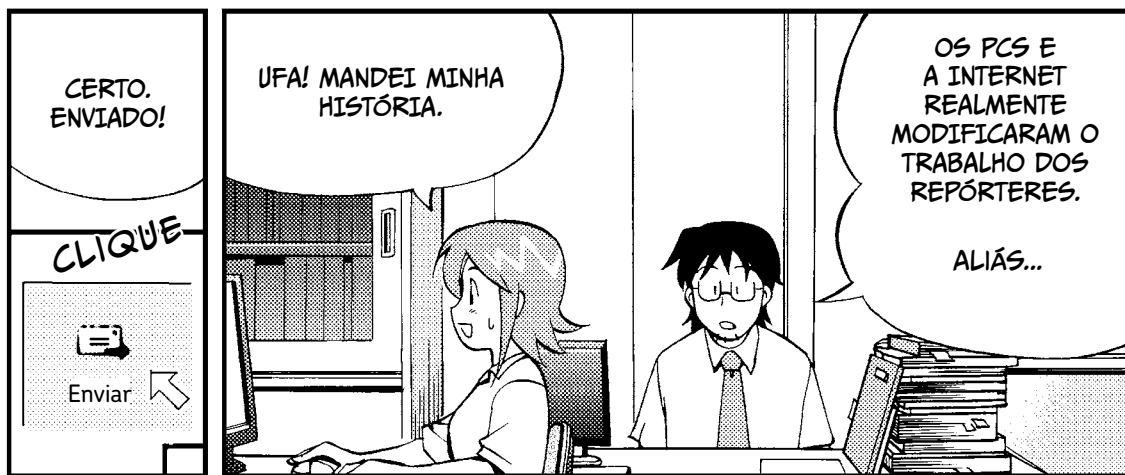


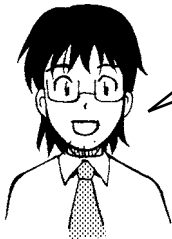
Figura 2

USANDO FUNÇÕES EXPONENCIAIS E LOGARÍTMICAS



*NOTA TRAD.: NORIKO FAZ UM TROCADILHO COM O TERMO "A LITTLE BIT", QUE SIGNIFICA "UM POQUINHO" EM INGLÊS

GENERALIZANDO FUNÇÕES EXPONENCIAIS E LOGARÍTMICAS



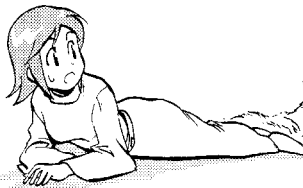
APESAR DAS FUNÇÕES EXPONENCIAL E LOGARÍTMICA SEREM CONVENIENTES, A DEFINIÇÃO QUE FIZEMOS DELAS ATÉ AGORA PERMITE APENAS NÚMEROS NATURAIS PARA x EM $f(x) = 2^x$ E POTÊNCIAS DE 2 PARA y EM $g(y) = \log_2 y$. NÃO TEMOS UMA DEFINIÇÃO PARA A POTÊNCIA -8 , A POTÊNCIA $7/3$ OU A POTÊNCIA $\sqrt{2}$, $\log_2 5$, OU $\log_2 \pi$.

HMM, O QUE FAZEMOS, ENTÃO?



VOU LHE CONTAR COMO DEFINIMOS FUNÇÕES EXPONENCIAIS E LOGARÍTMICAS EM GERAL, USANDO EXEMPLOS.

FELIZ QUE TENHA PERGUNTADO EU ESTOU. A FORÇA DO CÁLCULO USAMOS PARA ISSO. SIM.



PRIMEIRO, USANDO O NOSSO EXEMPLO ANTERIOR, VAMOS MUDAR A TAXA DE CRESCIMENTO ECONÔMICO ANUAL PARA SUA TAXA DE CRESCIMENTO INSTANTÂNEA.

Taxa de crescimento anual = $\frac{\text{Valor após 1 ano} - \text{Valor atual}}{\text{Valor atual}} = \frac{f(x+1) - f(x)}{f(x)}$



COMEÇAREMOS COM ESSA EXPRESSÃO.

EXPANSÃO DE TAYLOR DE VÁRIAS FUNÇÕES

[1] EXPANSÃO DE TAYLOR DE UMA RAIZ QUADRADA

Considerando $f(x) = \sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}}$.

Então, partindo de $f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}$

$$f''(x) = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} (1+x)^{-\frac{3}{2}}$$

$$f'''(x) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} (1+x)^{-\frac{5}{2}}, \dots$$

$$f'(0) = \frac{1}{2}, f''(0) = -\frac{1}{4}, f'''(0) = \frac{3}{8}, \dots$$

$$f(x) = \sqrt{1+x}$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2!} \times \left(-\frac{1}{4}\right)x^2 + \frac{1}{3!} \times \frac{3}{8}x^3 + \dots$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 \dots$$

[3] EXPANSÃO DE TAYLOR DA FUNÇÃO LOGARÍTMICA $\ln(1+x)$

Considerando $f(x) = \ln(x+1)$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$$

$$f''(x) = -(1+x)^{-2}, f^{(3)}(x) = 2(1+x)^{-3},$$

$$f^{(4)}(x) = -6(1+x)^{-4}, \dots$$

$$f(0) = 0, f'(0) = 1, f''(0) = -1, f^{(3)}(0) = 2!,$$

$$f^{(4)}(0) = -3!, \dots$$

Temos, então

$$\ln(1+x) =$$

$$0 + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!} \times 2!x^3 - \frac{1}{4!} 3!x^4 + \dots$$

$$\ln(1+x) =$$

$$x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n}x^n + \dots$$

[2] EXPANSÃO DE TAYLOR DA FUNÇÃO EXPONENCIAL e^x

Se fizermos $f(x) = e^x$,

$$f'(x) = e^x, f''(x) = e^x, f'''(x) = e^x, \dots$$

Então, partindo de

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots$$

$$+ \frac{1}{n!}x^n + \dots$$

Substituindo $x = 1$, obtemos

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$$

NO CAPÍTULO 4, APRENDEMOS QUE e VALE CERCA DE 2,7. AQUI, NÓS OBTAMOS A EXPRESSÃO QUE CALCULA SEU VALOR EXATO.



[4] EXPANSÃO DE TAYLOR DE FUNÇÕES TRIGONÔMÉTRICAS

Considerando $f(x) = \cos x$.

$$f'(x) = -\text{seno } x, f''(x) = -\text{cos } x, f^{(3)}(x) = \text{seno } x, f^{(4)}(x) = \text{cos } x, \dots$$

Partindo de

$$f(0) = 1, f'(0) = 0, f''(0) = -1,$$

$$f^{(3)}(0) = 0, f^{(4)}(0) = 1, \dots$$

Então,

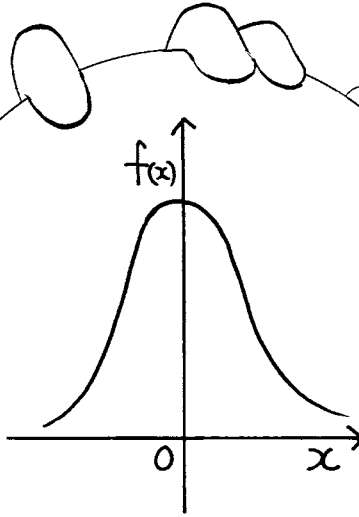
$$\cos x = 1 + 0x - \frac{1}{2!} \times 1 \times x^2 + \frac{1}{3!} \times 0 \times x^3 + \frac{1}{4!} \times 1 \times x^4 + \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!}x^{2n} + \dots$$

De forma semelhante,

$$\text{seno } x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1} + \dots$$

QUANDO ANALISAMOS COISAS INCERTAS USANDO A PROBABILIDADE, NORMALMENTE USAMOS A DISTRIBUIÇÃO NORMAL.



UH-HUH.

ESSA DISTRIBUIÇÃO É DESCRITA POR UMA DENSIDADE DE PROBABILIDADE QUE É PROPORCIONAL A

$$f(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

APÓS SER REDIMENSIONADA. O GRÁFICO DE $f(x)$ É SIMÉTRICA EM TORNO DO EIXO Y, COMO MOSTRA A FIGURA, E ELE SE PARECE COM UM SINO.

DESCULPE. ELE VAI ESCREVER PRA CARAMBA. VOCÊ PODE NOS DAR MAIS ALGUNS PORTA-COPOS?

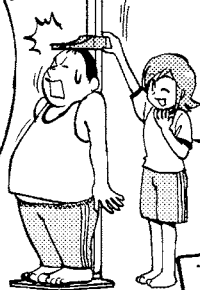
RABISCA
RABISCA

PLUMP

MUITO FENÔMENOS POSSUEM ESSA FORMA DE DISTRIBUIÇÃO. POR EXEMPLO, AS ALTURAS DE HUMANOS E ANIMAIS TÍPICAMENTE TÊM ESSA DISTRIBUIÇÃO.

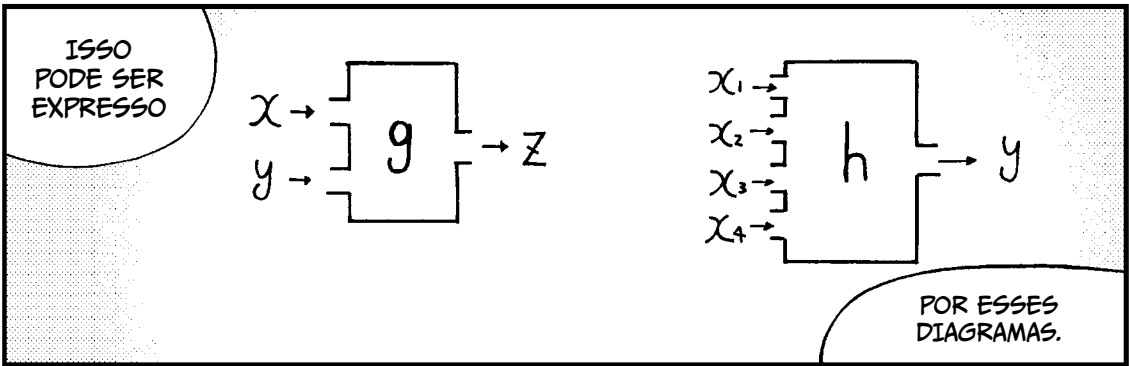
ERROS DE MEDIÇÃO, TAMBÉM.

BONC



NOS CÍRCULOS FINANCEIROS, ACREDITA-SE QUE AS TAXAS DE GANHO COM AÇÕES TENHAM UMA DISTRIBUIÇÃO NORMAL.

ALGUMAS CLASSIFICAÇÕES DE ESTUDANTES TÊM SIDO BASEADAS EM UMA DISTRIBUIÇÃO NORMAL PORQUE OS RESULTADOS DAS PROVAS COSTUMAM SE DISTRIBUIR DESSA MANEIRA.



NO CASO DO SR. SEKI, x É UMA REDAÇÃO EXCELENTE, y É UM ESTILO DE REPORTAGEM VIGOROSO E z É A TRANSFERÊNCIA PARA O ESCRITÓRIO PRINCIPAL. NÃO É ISSO?

BEM, AINDA NÃO SEI QUAIS SÃO AS RAZÕES DA MINHA TRANSFERÊNCIA.

NO CASO DA NORIKO, x_1 É A GAFFE DO MÊS PASSADO, x_2 É A GAFFE DESSE MÊS, E x_3 E x_4 SÃO A PÉSSIMA APARÊNCIA E HIGIENE QUE RESULTAM EM y , SEU REBAIXAMENTO PARA ESCREVER OBITUÁRIOS.

CALA A BOCA, SEU BOI ESTÚPIDO!

MUITO BEM, CHEGA. NORIKO, NÃO TEMOS MUITO TEMPO SOBRANDO.

VAMOS APRENDER O BÁSICO RAPIDAMENTE.

APERTA

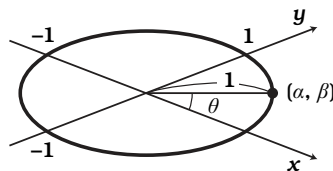
Com isso, descobrimos o seguinte.

Se $z = f(x, y)$ possui uma função linear de aproximação perto de $(x, y) = (a, b)$, ela é dada por

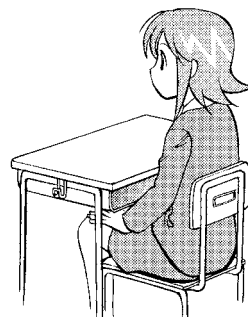
$$\textcircled{3} \quad z = f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) + f(a, b)$$

$$\text{ou}^* \quad z = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b) + f(a, b)$$

Considere um ponto (α, β) em um círculo de raio 1 centralizado na origem do plano $x - y$ (o chão). Temos $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ (ou $\alpha = \cos \theta$ e $\beta = \text{seno } \theta$). Agora calculamos a derivada na direção de $(0, 0)$ a (α, β) . Um deslocamento de distância t nessa direção é expressa por $(a, b) \rightarrow (a + \alpha t, b + \beta t)$. Se fizermos $\varepsilon = \alpha t$ e $\delta = \beta t$ em $\textcircled{1}$, obtemos



$$\begin{aligned} \text{Erro relativo} &= \frac{f(a + \alpha t, b + \beta t) - f(a, b) - (p\alpha t + q\beta t)}{\sqrt{\alpha^2 t^2 + \beta^2 t^2}} \\ &= \frac{f(a + \alpha t, b + \beta t) - f(a, b)}{t\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} - p\alpha - q\beta \\ &= \frac{f(a + \alpha t, b + \beta t) - f(a, b)}{t} - p\alpha - q\beta \end{aligned}$$



$$\textcircled{4} \quad \text{Como } \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = 1$$

Assumindo $p = f_x(a, b)$ e $q = f_y(a, b)$, nós modificamos $\textcircled{4}$ como segue:

$$\textcircled{5} \quad \frac{f(a + \alpha t, b + \beta t) - f(a, b + \beta t)}{t} + \frac{f(a, b + \beta t) - f(a, b)}{t} - f_x(a, b)\alpha - f_y(a, b)\beta$$

Como a derivada de $f(x, b + \beta t)$, uma função de x apenas, em $x = a$ fica

$$f_x(a, b + \beta t)$$

obtemos, a partir da função linear de aproximação com uma variável,

$$f(a + \alpha t, b + \beta t) - f(a, b + \beta t) \approx f_x(a, b + \beta t)\alpha t$$

* Nós calculamos a função linear de aproximação de forma tal que seu erro relativo se aproxima de 0 quando $AP \rightarrow 0$ na direção de x ou y . No entanto, não fica aparente se o erro relativo $\rightarrow 0$ quando $AP \rightarrow 0$ em qualquer direção para a função linear que é construída a partir das derivadas $f_x(a, b)$ e $f_y(a, b)$. Agora nós vamos olhar isso com mais detalhes, apesar da discussão aqui não ser tão rígida.

A

SOLUÇÕES DOS EXERCÍCIOS

PRÓLOGO

1. Substituindo

$$y = \frac{5}{9}(x - 32) \text{ em } z = 7y - 30, z = \frac{35}{9}(x - 32) - 30$$

CAPÍTULO 1

1. A. $f(5) = g(5) = 50$
B. $f'(5) = 8$

$$\begin{aligned} 2. \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(a + \varepsilon) - f(a)}{\varepsilon} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{(a + \varepsilon)^3 - a^3}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{3a^2\varepsilon + 3a\varepsilon^2 + \varepsilon^3}{\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (3a^2 + 3a\varepsilon + \varepsilon^2) = 3a^2 \end{aligned}$$

Então, a derivada de $f(x)$ é $f'(x) = 3x^2$.

CAPÍTULO 2

1. A solução é

$$f'(x) = -\frac{(x^n)'}{(x^n)^2} = -\frac{nx^{n-1}}{x^{2n}} = -\frac{n}{x^{n+1}}$$

B

PRINCIPAIS FÓRMULAS, TEOREMAS E FUNÇÕES APRESENTADOS NESTE LIVRO

EQUAÇÕES LINEARES (FUNÇÕES LINEARES)

A equação de uma reta que tenha inclinação m e que passe por um ponto (a, b) :

$$y = m(x - a) + b$$

DERIVAÇÃO

COEFICIENTES DIFERENCIAIS

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

DERIVADAS

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Outras notações de derivadas

$$\frac{dy}{dx}, \frac{df}{dx}, \frac{d}{dx} f(x)$$

CONSTANTE DE MULTIPLICAÇÃO

$$\{\alpha f(x)\}' = \alpha f'(x)$$

DERIVADAS DE FUNÇÕES DE GRAU N

$$\{x^n\}' = nx^{n-1}$$